140. 函數ノ多葉性ニ關スル注意

木村 邦五郎（東京物理學校）

次ノ定理ハ本誌30号ノ拙論ノ定理1ヲ幾分一般化シタモノデアリマスガ、コノ方面ノコトハ尾崎氏ガ種々研究サレテ居ラレマスノデ或ヒハ次ノ定理モ發表サレテヰルカモ知レマセンガ Sci Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A, 2 (1935), 167—188 マデニハ見當ラヌ様ニ思ヒマスノデ（本質的ニハ含マレテヰルカモ知レマセンガ）次ニ述ベルコトニシマス。

定理. $f(z)$ ガ凸範圍 D デ正則デ、亦 $P_n(z)$ ハ n 次ノ多項式デソノ零点ハ悉ク D ニ属スルモノトシ、且 $n(\geqq 0)$, $p(>0)$ ヲ整數,

$$\Re\left\{e^{i\omega}\frac{d^{n+p}}{dz^{n+p}}\left(P_n(z)f(z)\right)\right\}>0, \quad (\omega:\text{ 実常数})$$

ナラバ $f(z)$ ハ D デ高々 p 葉デアル。

証明. $P_n(z)=a(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots\cdots(z-\alpha_n)$, $(a\neq 0)$

トスレバ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ ハDニ属ス。（コノ場合 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ ノイクツカヅツガ等シクテモヨロシイ）

今 $F(z)=e^{i\omega}P_n(z)f(z)$ トオキ $\underset{F}{\Delta}_k(z_{k+1}, z_k, \cdots\cdots, z_1)$ ヲ $F(z)$ ニツイテノ連差商（本紙30号拙論ノ△ト同ジ意味）トシマスト

$$e^{i\omega}af(z)=\underset{F}{\Delta}_n(z, \alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots\cdots, \alpha_1)$$

$$=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 F^{(n)}(z')t_1^{n-1}t_2^{n-2}\cdots t_{n-1}\,dt_1\,dt_2\cdots dt_n$$

コヽニ $z'=\alpha_1+(\alpha_2-\alpha_1)t_1+\cdots\cdots+(\alpha_n-\alpha_{n-1})t_1t_2\cdots\cdots t_{n-1}+(z-\alpha_n)t_1t_2\cdots\cdots t_n$ デアル。

上式ノ右ノ等式ハ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n, z$ ガ凸領域Dニゾクシ且ツ $F(z)$ ガDデ正則デアルコトヨリ本誌30号補助定理(拙論)ヨリ得ラレ、又上式ノ左ノ等式ハ次ノコトヨリ認メラレマス、即チ $F(\alpha_1)=0$ ナルコトヲ用ヒテ

$$\underset{F}{\Delta}_1(z, \alpha_1)=\frac{F(z)-F(\alpha_1)}{z-\alpha_1}=\frac{F(z)}{z-\alpha_1}=e^{i\omega}a(z-\alpha_2)\cdots\cdots(z-\alpha_n)f(z)$$

$$\underset{F}{\Delta}_2(z, \alpha_2, \alpha_1)=\frac{\dfrac{F(z)}{z-\alpha_1}-\left(\dfrac{F(z)}{z-\alpha_1}\right)_{z=\alpha_2}}{z-\alpha_2}=\frac{F(z)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}$$

$$=e^{i\omega}a(z-\alpha_3)\cdots\cdots(z-\alpha_n)f(z)$$

（$\alpha_1 \neq \alpha_2$ デモ $\alpha_1=\alpha_2$ デモ $\left(\dfrac{F(z)}{z-\alpha_1}\right)_{z=\alpha_2}=0$ トナリマスカラ）

コノ事ヲ続ケテ行クコトニヨッテ上式ノ成立スルコトが分リマス。次ニ

$$f_1(z)=e^{i\omega}a\,f(z) \quad \text{トオケバ}$$

$$\text{余}_{f_1}^{p}(z_{p+1},z_p,\cdots\cdots,z_1)=\int_0^1\!\!\int_0^1\cdots\cdots\int_0^1 F^{(n+p)}(z'')\,t_1^{\,n+p-1}\,t_2^{\,n+p-2}\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots t_{n-1}^{\,p+1}\,t_n^{\,p}\,u_1^{\,p-1}\,u_2^{\,p-2}\cdots\cdots u_{p-1}\,dt_1 dt_2\cdots\cdots dt_n\,du_1\cdots\cdots du_p$$

ココニ $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_{p+1}$ ハD内ノ任意ノ点デ又

$$z'_k=\alpha_1+(\alpha_2-\alpha_1)t_1+\cdots\cdots+(\alpha_n-\alpha_{n-1})t_1\cdots\cdots t_{n-1}$$
$$+(z_k-\alpha_n)t_1\cdots\cdots t_n$$

トシ $z''=z'_1+(z'_2-z'_1)u_1+\cdots\cdots+(z'_{p+1}-z'_p)u_1u_2\cdots\cdots u_p$

デアル。

コノコトハ $\dfrac{d^p}{dz^p}F^{(n)}(z')=t_1^{\,p}t_2^{\,p}\cdots\cdots t_n^{\,p}F^{(n+p)}(z')$ ナルコトト上記補助定理（本誌３０号ノ）ヲ用ヒテ容易ニ得ラレマス。

　最後ノ式ト仮説 $\mathcal{R}\left\{e^{i\omega}\dfrac{d^{n+p}}{dz^{n+p}}\left(P_n(z)f(z)\right)\right\}>0$（即チ $\mathcal{R}\left\{F^{(n+p)}(z)\right\}>0$）ヨリ $\mathcal{R}\left\{\text{余}_{f_1}^{p}(z_{p+1}, z_p, \cdots\cdots, z_1)\right\}>0$ が得ラレ、コレヨリ $f_1(z)$ がDデ高々 p 葉、従ッテ $\dfrac{f_1(z)}{ae^{i\omega}}=f(z)$,（$ae^{i\omega}\neq 0$ ナル常数ダカラ）がDデ高々 p 葉トナリマス。

コレヲ級数ノ形ノ定理ニシテ見マスト

　系．$f(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_pz^p+\cdots\cdots$ が $|z|<r$ デ正則デ

$b_0+b_1z+\cdots\cdots+b_nz^n\,(b_n\neq 0)$ ノ零点が悉ク $|z|<r$ ニ含マ

レ，且ツ

$$|b_n a_p + b_{n-1} a_{p+1} + \cdots\cdots + b_0 a_{n+p}|$$

$$\geqq \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+p+k}{n+p} |b_n a_{p+k} + b_{n-1} a_{p+k+1} + \cdots\cdots + b_0 a_{p+k+n}| r^k$$

ナラバ $f(z)$ ハ $|z|<r$ デ高々 p 葉デアル。

係数ニ適當ノ條件ヲツケタラ或ハ面白イ結果ガ出ルカモ知レマセン。

以上ハ私達ノサヽヤカナ數學研究（森本清吾先生御指導ノ下ニ平野幸太郎氏ト私デヤッテヰル）デ5月10日（金曜日）ニ得タモノデス。

浅學ナ私ノコトデスカラ何カ誤ッテヰル所ガアルカモ知レマセンガ、モシソウデアッタラ御教示下サル様諸氏ニ御願ヒ致シマス。

——（5月16日）——